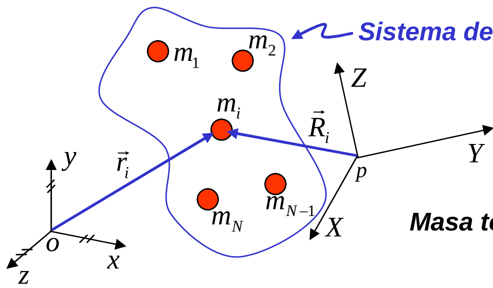
Definición del sistema

Sistema de N partículas de masa m_i constante !



Masa total del sistema $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Posición absoluta y relativa del centro de masas

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad \vec{R}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i$$

Velocidad y aceleración absolutas del centro de masas

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

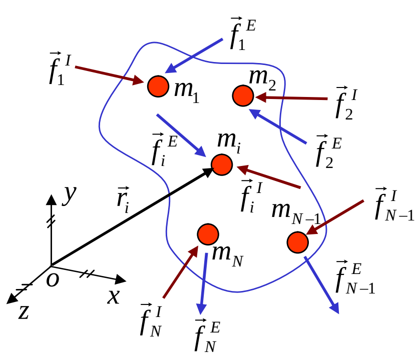
Cantidad lineal de movimiento de la partícula i y del sistema

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_c$$

Cantidad angular de movimiento de la partícula i y del sistema respecto a p

$$\vec{h}_{Pi} = \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad \vec{h}_P = \sum_{i=1}^{N} \vec{h}_{Pi} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i$$

1ra Ley de la mecánica



$\vec{f}_i^{\,E}$ … **Resultante de fuerzas externas al sistema que actúan sobre i (producida por la interacción de la partícula i con el exterior)**

$\vec{f}_i^{\,I}$ … **Resultante de fuerzas internas que actúan sobre i (producidas por la interacción de las partículas del sistema)**

Acción / reacción

2da ley de Newton a la partícula i $\quad \vec{f}_i^{\,E} + \vec{f}_i^{\,I} = m_i \vec{a}_i$

2da ley de Newton a las N partículas y sumando $\quad \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{\,E} + \cancelto{\vec{0}}{\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{\,I}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}_{\text{fuerzas inerciales}}$

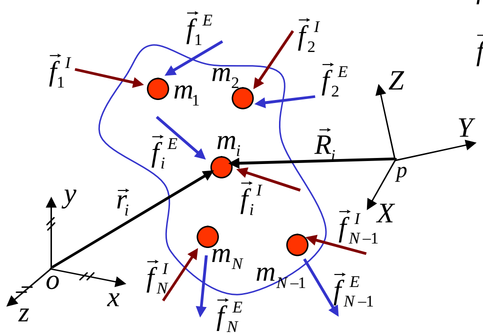
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_i^{\,E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{\,E} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

Recordando $\quad \vec{a}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_c$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_i^{\,E} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_C = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La resultante de fuerzas externas es igual a la resultante de las fuerzas inerciales o igual al cambio de la cantidad lineal de movimiento del sistema

2da Ley de la mecánica



$\vec f_i^{\,E}$ … ***Resultante de fuerzas externas al sistema que actúan sobre i***

$\vec f_i^{\,I}$ … ***Resultante de fuerzas internas que actúan sobre i***

Sistema móvil PXYZ

2da ley de Newton a la partícula i

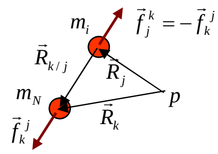
$$\vec f_i^{\,E} + \vec f_i^{\,I} = m_i \vec a_i$$

Premultiplicando Ri

$$\vec R_i \times \vec f_i^{\,E} + \vec R_i \times \vec f_i^{\,I} = \vec R_i \times m_i \vec a_i$$

Sumando para las N partículas ⇒ $\sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times \vec f_i^{\,E} + \sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times \vec f_i^{\,I} = \sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times m_i \vec a_i$

$\sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times \vec f_i^{\,I} = ?$ ⇒ *Sist. de 2 partículas* ⇒



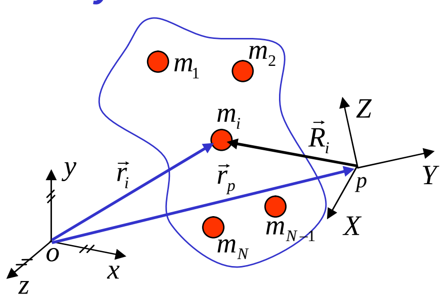
$\vec f_j^{\,k} = -\vec f_k^{\,j}$ *Acción / reacción*

$$\sum_{i=1}^{2} \vec R_i \times \vec f_i^{\,I} = \vec R_j \times \vec f_j^{\,k} + \vec R_k \times \vec f_k^{\,j} = \left(\vec R_k - \vec R_j\right) \times \vec f_k^{\,j} = \vec R_{k/j} \times \vec f_k^{\,j} = \vec 0 \Leftarrow \vec R_{k/j} \parallel \vec f_k^{\,j} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times \vec f_i^{\,I} = \vec 0$$

⇒ $\vec M_p^{\,E} = \sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times m_i \vec a_i$

El momento de la fuerzas externas es igual al momento de las fuerzas inerciales respecto a un mismo punto p

2da Ley de la mecánica: otra forma



$\vec r_i = \vec r_p + \vec R_i$ ⇒ $\vec R_i = \vec r_i - \vec r_p \quad \forall t$

Recordando $\vec h_P = \sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times m_i \vec v_i$

Derivando

$$\frac{d\vec h_P}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times m_i \vec v_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec R_i}{dt} \times m_i \vec v_i + \sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times \frac{d}{dt}\left(m_i \vec v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec r_i - \vec r_p\right) \times m_i \vec v_i + \sum_{i=1}^{N} \vec R_i \times m_i \vec a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\vec v_i - \vec v_p\right) \times m_i \vec v_i + \vec M_p^{\,E}$$

$$= \vec v_p \times M \vec v_c + \vec M_p^{\,E}$$

⇒ $\vec M_p^{\,E} = \frac{d\vec h_P}{dt} + \vec v_p \times M \vec v_c$

El momento de la fuerzas externas es igual al cambio de la cantidad angular de movimiento respecto a p mas el término $\vec v_p \times M \vec v_c$